$$\det\begin{pmatrix}3&5&2\\3&6&2\\3&5&3\end{pmatrix} \underset{L_3\leftarrow L_3-L_1}{\overset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{=}} \det\begin{pmatrix}3&5&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=3$$

Dans cette séance on va voir :

(i) Déf de matrice triangulaire sup/inf et diagonale

(ii) Calcul de déterminant dans ce cas

(iii) Lien entre déterminant de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et volume

(iv) Lien entre déterminant et inversibilité

(v) Déf de matrices semblables $\longrightarrow$ le lien avec le déterminant

Déf. 6.19 | Une matrice carrée $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ est dite triangulaire supérieure (Δsup) (resp. inférieure (Δ inf)) si

$A_{i,j} = 0$ si $i > j$ (resp. $i < j$).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

est Δ.sup.

$A_{2,1}$, $A_{3,1}$, $A_{3,2}$

et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ est Δ inf.

A est dite diagonale si $A_{i,j} = 0$ pour tout $i \neq j$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lemme 6.22 Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure ou inférieure. Alors

$$\det(A) = A_{1,1} \cdot A_{2,2} \cdot \ldots \cdot A_{n,n}$$

Exemple 6.21*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{\Delta \text{ sup}}$$

OEL III
ne change pas le det !

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-5)\, 1 \cdot 3 = -30$$

Exemple 6.25

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) Calculer F.E. de A mais écrivez toutes les OEL

(2) Calculer det(A) à partir de (1).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\underbrace{L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1}_{\text{OEL III}}]{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & -8 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\triangledown \\ \lambda^{-1}}]{L_2 \leftarrow \overset{\lambda}{-\frac{1}{4}} L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & -8 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \det\left(\quad \right) = \boxed{-4} \det\left(\quad \right)$$

$$\xrightarrow[\underbrace{L_4 \leftarrow L_4 + 5L_2}_{\text{OEL III}}]{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\triangledown \\ (\text{OEL II})}]{L_3 \leftarrow \frac{L_3}{6}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= (-4) \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = (-4)\cdot(-6) \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3}}_{\text{OEL III}}$$

$$= (-4)\cdot(-6)\underbrace{\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{=3} = 72$$

(Lemme 6.22) $\square$

THM 6.28 Pour $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, on a

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Quelques applications

(i) $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$ pour A inversible

(ii) $\det(P.A.P^{-1}) = \det(A)$ pour P inversible

$\boxed{\text{Preuve de (i)}}$ Indice: $\boxed{\det(I_n)=1}$

Comme $A.A^{-1} = I_n$, alors

$$\underbrace{\det(A.A^{-1})}_{\overset{\text{THM}}{=}\ \det(A).\det(A^{-1})} = \det(I_n) = 1 \implies \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

□

$\boxed{\text{THM. 6.29}}$ A est inversible $\iff \det(A) \neq 0$

(pour $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$)

Déf. 6.32 On dit que A et $B \in M_n(\mathbb{R})$ sont semblables s'il existe $P \in M_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $B = P \cdot A \cdot P^{-1}$

L'item (ii) dans l'application précédente nous dit que

THM 6.34 Si A et B sont semblables, alors
$$\det(A) = \det(B)$$

Example 6.31 Quand est-ce que $A = \begin{pmatrix} 0 & t & -1 \\ t & 10 & 0 \\ t-1 & 1 & t \end{pmatrix}$ est inversible ? $(t \in \mathbb{R})$

$$A \text{ inversible} \underset{\text{[THM 6.29]}}{\Longleftrightarrow} \det(A) \neq 0$$

Or

$$\det(A) = -t \cdot \det\begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix} + (t-1) \cdot \det\begin{pmatrix} t & -1 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -t\,(t^2+1) + (t-1) \cdot 10$$

$$= -t^3 - t + 10t - 10 = -t^3 + 9t - 10$$

Critère de Gauss

Toute racine $\in \mathbb{Q}$ d'un polynôme $t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_0$ avec $a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{Z}$ est entière et divise a_0.

[Dans ce cas, il faut essayer avec $\{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$.
Si l'on calcule avec $t=2$, on trouve $-8+18-10=0$

Donc $-t^3+9t-10 = (t-2)\cdot \underbrace{q(t)}_{\text{poly de deg. 2}}$

et

$$q(t) = \frac{-t^3+9t-10}{t-2} \rightsquigarrow$$

$$\begin{array}{r|l} -t^3+0t^2+9t-10 & t-2 \\ \hline -\ (-t^3+2t^2) & \boxed{-t^2-2t+5} = q(t) \\ -2t^2+9t & \\ -\ (-2t^2+4t) & \\ 5t-10 & \\ 5t-10 & \\ \hline \cancel{0} & \end{array}$$

$$\Rightarrow -t^3+9t-10 = -(t-2).(t^2+2t-5)$$
$$= -(t-2)(x+1+\sqrt{6})(x+1-\sqrt{6})$$

So $\det(A) = -t^3 + 9t - 10 \neq 0$

ssi

$t \notin \{2, -1-\sqrt{6}, -1+\sqrt{6}\}$